TITLE:
Dirac作用素のスペクトルについて
(位相解析の物理数学への応用)

AUTHOR(S):
山田, 修宣

CITATION:
山田, 修宣. Dirac作用素のスペクトルについて (位相解析の物理数学への応用). 数理解析研究所講究録 1972, 161: 183-187

ISSUE DATE:
1972-10

URL:
http://hdl.handle.net/2433/106901

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
161巻 1972年 183-187

Dirac作用素のスペクトルについて

京大 理　山田修宣

下記のことは、本研究集会の最後に追加講演として、発表させていただいた内容ですが、少し変えたところもあります。なお証明などの詳しい議論については、Publ. Res. Inst. Math. Sci. に発表される予定の、O. Yamada, "On the principle of limiting absorption for the Dirac operator" を見られたい。

unperturbed Dirac 作用素

$$L_0 = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \beta \qquad (\ i = \sqrt{-1}\ )$$

と perturbed Dirac 作用素

$$L = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \beta + Q(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

を考えよう。ここで、α_j, β は、4 × 4 の、対称な (Hermitian) 定数行列で、$\alpha_4 = \beta$ とおいたとき次の関係をみたすとする。

$$\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk} I, \qquad j, k = 1, 2, 3, 4.$$

（I は 4×4 の単位行列で、δ_{jk} はクロネッカーの記号である。）ポテンシャル $Q(x)$ は、4×4 の対称行列値の $\mathbb{R}^3$ の関数である。我々は、このDirac作用素をヒルベルト空間 $\mathcal{L}^2 = (L^2(\mathbb{R}^3))^4$ で考える。ここで、$\mathcal{L}^2$ は $\mathbb{C}^4$ ベクトル値の $\mathbb{R}^3$ の関数 $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x))$ で

$$(\|u\|_{\mathcal{L}^2})^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 dx < \infty, \quad |u(x)|^2 = \sum_{j=1}^{4} |u_j(x)|^2$$

をみたすものの全体である。内積は、$u, v \in \mathcal{L}^2$ に対して

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \langle u(x), v(x) \rangle dx, \quad \langle u(x), v(x) \rangle = \sum_{j=1}^{4} u_j(x) \overline{v_j(x)}$$

で与える。このとき L_0 は、一意的な自己共役作用素 H_0 をもち、その定義域は $\mathcal{H}^1$ に一致する、ことがわかっている（例えば、Kato [2]）。$\mathcal{H}^1$ は、$\mathcal{L}^2$ の関数で、一階の distribution の意味での偏微分もすべて $\mathcal{L}^2$ であるような関数全体の作る、ヒルベルト空間である。

自己共役作用素 H_0 のスペクトルについては、次のことが知られている（例えば．Mochizuki [3]）。

性質 1　$|\lambda| \geq 1$ であるような実数 λ は、すべて H_0 の連続スペクトルであり．区間 $(-1, +1)$ は H_0 の resolvent 集合に含まれる。

次に、$H = H_0 + Q$ の自己共役性について考えよう。この問題については．Prosser [4] により次の結果が得られる。

性質 2　$Q(x)=Q_1(x)+Q_2(x)$ で、$Q_i(x)=(q_{ij}^{(k)}(x))$ $(k=1,2)$ とおく。$Q_1(x)$ については、$q_{ij}^{(1)}(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ $(i,j=1,2,3,4)$ がなりたす．$Q_2(x)$ については、ある正数 $p>3$ があって、$q_{ij}^{(2)}(x)\in L^p(\mathbb{R}^3)$ $(i,j=1,2,3,4)$ がみたされる，とする。このとき．$H=H_0+Q$ は、その定義域 $\mathscr{D}(H)$ が $\mathscr{D}(H)=\mathscr{D}(H_0)=\mathscr{H}^1$ であるような自己共役作用素である。

さて、H のスペクトルの性質を調べよう。まず、本質的スペクトルについては，次の事実が示される。

定理 1　ある正数 $p>3$ があって、$|Q(x)|$ は局所的に $L^p(\mathbb{R}^3)$ かつ、$|Q(x)|=o(1)$ $(|x|\to\infty)$、とする。ここで、$|Q(x)|$ は $Q(x)=(q_{ij}(x))$ のとき、$|Q(x)|=\sqrt{\sum_{i,j}|q_{ij}(x)|^2}$ で定義する。そのとき．$H=H_0+Q$ の本質的スペクトルは、H_0 のそれと一致する。

次に、$(-\infty,-1)$ 又は $(+1,+\infty)$ に、H の固有値が存在しないための十分条件を与える。この定理は、Roze [5] の線に沿って証明される。

定理 2　$Q(x)=(q_{ij}(x))$ は定理 1 の仮定をみたし、各 $q_{ij}(x)$

は，有限個の特異点を除いて一回連続的微分可能であり、かつ正の定数 C_1 と R_0 があって

$$\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial Q}{\partial x_k}\right| \leq C_1 \qquad (|x| \geq R_0)$$

さらに

$$|x|\,|Q(x)| \longrightarrow 0 \qquad (|x| \to \infty)$$

とする。このとき，$H = H_0 + Q$ は $(-\infty, -1)$，$(+1, +\infty)$ に固有値を持たない。

最近、Agmon [1] は、全空間の楕円型作用素に対して、極限吸収法とスペクトルの絶対連続性を論じているが、それを参考にすれば，Dirac 作用素に対しても同様のことがなりたつ。

定理 3　$Q(x)$ は定理 2 の仮定をみたしさらに、ある $h>0$ があって

$$|Q(x)| \leq \frac{\text{const.}}{(1+|x|)^{1+h}} \qquad (|x| \geq R_0)$$

とするとき，任意の $s > \frac{1}{2}$ と $(-\infty, -1)$ または $(+1, +\infty)$ に含まれる区間 $[a, b]$ に対して、ある定数 $C_2 = C_2(s, a, b)$ があって

$$\int_{R^3}(1+|x|)^{-2s}\left(|u(x)|^2+\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial}{\partial x_k}u(x)\right|^2\right)dx \leq C_2\int_{R^3}(1+|x|)^{2s}\left|(L-\lambda)u\right|^2 dx$$

が，すべての $u \in \mathcal{H}_s^1$ と、$a \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq b$、$|\mathrm{Im}\,\lambda| \leq 1$ なる、す

べての複素数λに対してなりたつ。ここで，$u \in \mathcal{H}^1_s$とは

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1+|x|)^{2s} \left(|u(x)|^2 + \sum_{k=1}^{3} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} u(x) \right|^2 \right) dx < +\infty$$

なる関数全体である（微分はdistributionの意味）。

（系）$H = H_0 + Q$ のスペクトル分解を、$H = \int \lambda \, dE(\lambda)$ とおく。このとき．任意の $f \in \mathcal{L}^2$ に対して、$(E(\lambda)f, f)$ はλの関数として，$(-\infty, -1)$，$(+1, +\infty)$ で絶対連続である。

REFERENCES

1 Agmon, S., Spectral properties of Schrödinger operators, Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome2, 679-683.

2 Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

3 Mochizuki, K., On the perturbation of the continuous spectrum of the Dirac operator, Proc. Japan Acad., 40(1964), 707-712

4 Prosser, T., Relativistic potential scattering, J. Mathematical Phys., 4(1963), 1048-1054.

5R Roze, S. N., On the character of the spectrum of the Dirac operator, Theoretical and Mathematical Physics, 2(1970), 377-382.